

3.2.13 Obvody a obsahy obrazců II

Předpoklady: 030212

Pedagogická poznámka: Cílem hodiny je nácvič příkladů, kde je nutné výslednou plochu získat jako součet nebo rozdíl jiných snáze určitelných ploch. Ve všech příkladech je tak nutné nakreslit obrázek a nad ním hledat postup.

Př. 1: Vypočti poloměr kruhu, jehož obsah i obvod je roven stejnému číslu.

Obsah kruhu $S = \pi r^2$, obvod kruhu $o = 2\pi r$.

Platí: $S = o$

$$\pi r^2 = 2\pi r$$

$$r = 2$$

Pro kruh o poloměru 2 platí, že jeho obsah i obvod se rovnají stejnému číslu.

Př. 2: Urči plochu obdélníkového stolu o rozměrech a , b , jestliže stůl je v každém rohu zaoblen do kruhu o poloměru r .

Nakreslíme si obrázek stolu a rozdělíme si jej na jednoduché útvary.



Určíme velikosti ploch vybarvených jednou barvou.

Červený obdélník

$$\text{Strany: } (a - 2r) \text{ a } (b - 2r) \Rightarrow S_1 = ab = (a - 2r)(b - 2r) = ab - 2r(a + b) + 4r^2$$

Dva zelené obdélníky

$$\text{Strany: } (a - 2r) \text{ a } r \Rightarrow S_2 = 2ab = 2(a - 2r)r = 2ar - 4r^2$$

Dva modré obdélníky

$$\text{Strany: } (b - 2r) \text{ a } r \Rightarrow S_3 = 2ab = 2(b - 2r)r = 2br - 4r^2$$

Čtyři modré čtvrtkruhy (dohromady jeden kruh)

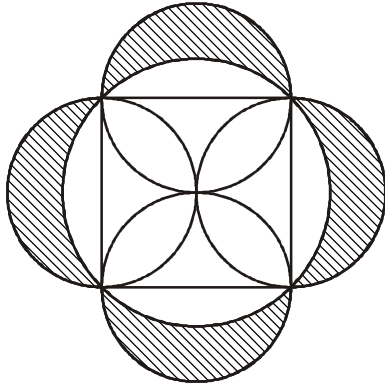
$$\text{Poloměr } r \Rightarrow S = \pi r^2$$

$$\text{Celkem: } S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = ab - 2r(a + b) + 4r^2 + 2ar - 4r^2 + 2br - 4r^2 + \pi r^2$$

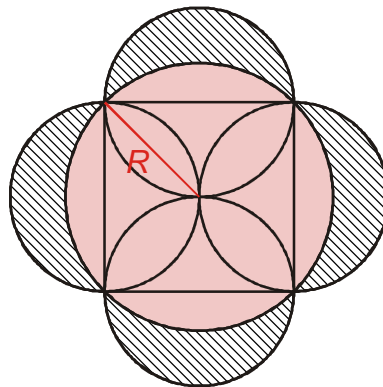
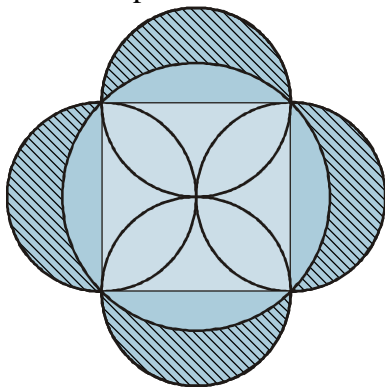
$$S = ab - 4r^2 + \pi r^2$$

Plocha stolu se rovná $ab - 4r^2 + \pi r^2$.

Př. 3: Čtverci o straně a je opsána kružnice. Ve středu každé ze stran je střed další kružnice o poloměru $\frac{a}{2}$. Urči obsah měsíčků, které vzniknou nad každou ze stran.



Vyšrafovanou plochu můžeme určit tím, že od modré plochy (čtverec a čtyři menší půlkruhy) odečteme plochu většího kruhu.



Čtverec: $S_1 = a^2$.

Menší kruh: $S_2 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$.

Modrá plocha (čtverec a dva menší kruhy): $S_m = a^2 + 2 \cdot \frac{\pi a^2}{4} = a^2 + \frac{\pi a^2}{2}$.

Poloměr většího kruhu je roven polovině úhlopříčky čtverce: $R = \frac{u}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

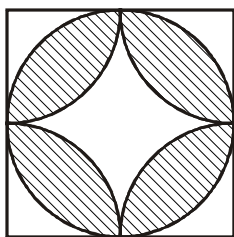
Větší kruh: $S_3 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi 2a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{2}$.

Vyšrafovaná plocha: $S = S_m - S_3 = a^2 + \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2} = a^2$.

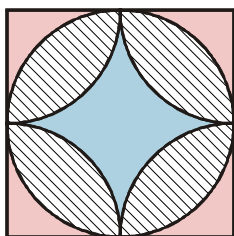
Obsah vyšrafované plochy se rovná a^2 .

Př. 4: Čtverci $ABCD$ o straně a je vepsán kruh k . Dále jsou ve všech jeho vrcholech sestrojeny čtvrtkruhy o poloměrech $r = \frac{a}{2}$ zapadající dovnitř čtverce. Vypočti obsah útvaru, který vznikne jako průnik vepsaného kruhu a čtvrtkruhů.

Obrázek



Plochu čtverce můžeme rozdělit na tři části.



Červená plocha: Obsah čtverce bez obsahu vepsané kružnice \Rightarrow

$$S_c = a^2 - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \pi \frac{a^2}{4}.$$

Modrá plocha: Obsah čtverce bez obsahu čtyř čtvrtkruhů o poloměru $\frac{a}{2}$ (tedy jednoho kruhu

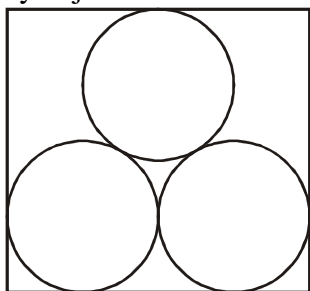
o poloměru $\frac{a}{2}$) $\Rightarrow S_m = a^2 - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \pi \frac{a^2}{4}.$

Vyšrafovaná plocha: Obsah čtverce bez modré a červené plochy \Rightarrow

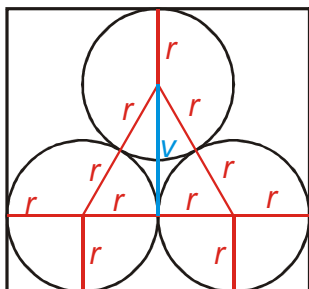
$$S = a^2 - S_c - S_m = a^2 - \left(a^2 - \pi \frac{a^2}{4}\right) - \left(a^2 - \pi \frac{a^2}{4}\right) = 2\pi \frac{a^2}{4} - a^2 = \pi \frac{a^2}{2} - a^2 = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Vzniklý útvar má plochu $a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$

Př. 5: Urči rozměry gumičky, ze které je možné vystříhnout způsobem nakresleným na obrázku tři kruhová těsnění o poloměru r . Jaká část původního množství gumy se využije na těsnění?



Dokreslíme do obrázku poloměry těsnění (ke všem bodům dotyku kružnic).



Z obrázku vidíme, že původní guma je obdélník, pro který platí:

- vodorovná strana má délku $4r$,
- svislá strana má délku $2r + v$, kde v je výška v rovnostranném trojúhelníku.

Z Pythagorovy věty platí: $(2r)^2 = v^2 + r^2$

$$v^2 = 4r^2 - r^2$$

$$v^2 = 3r^2$$

$$v = r\sqrt{3} \Rightarrow \text{svislá strana má délku } (2 + \sqrt{3})r.$$

$$\text{Obsah obdélníka: } S = ab = 4r \cdot (2 + \sqrt{3})r = 4r^2(2 + \sqrt{3}).$$

$$\text{Obsah tří těsnění: } S = 3 \cdot \pi r^2.$$

Určení části použité na těsnění.

$$100\% \quad \dots \quad 4r^2(2 + \sqrt{3})$$

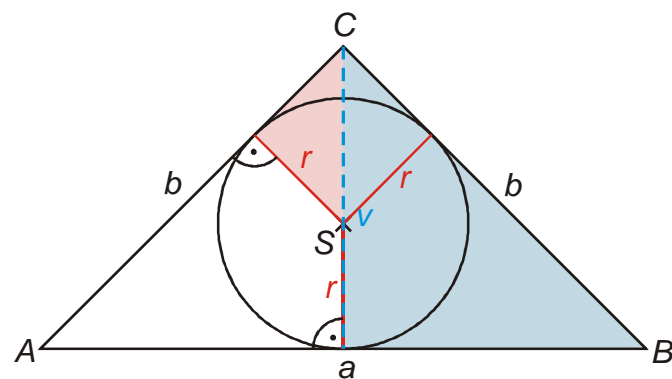
$$x\% \quad \dots \quad 3\pi r^2$$

$$\frac{x}{100} = \frac{3\pi r^2}{4r^2(2 + \sqrt{3})} = \frac{3\pi}{4(2 + \sqrt{3})}$$

$$x = \frac{3\pi}{4(2 + \sqrt{3})} \cdot 100\% \doteq 63\%$$

Gumička má rozměry $(2 + \sqrt{3})r$ x $4r$, na těsnění využijeme 63% původního materiálu.

Př. 6: Urči poloměr kružnice vepsané rovnoramennému trojúhelníku se základnou a a ramenem b .



Vyznačíme do obrázku poloměry kružnice v místech dotyku se stranami trojúhelníka. A s jejich pomocí hledáme pravoúhlé trojúhelníky:

Našli jsme dva podobné pravoúhlé trojúhelníky, z jejich podobnosti vyplývá:

$$\frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{2b}{a} = \frac{v-r}{r}.$$

$$\text{Upravujeme: } 2br = a(v-r).$$

$$2br + ar = av$$

$$r = \frac{av}{2b+a} \Rightarrow \text{zbyvá určit výšku na základnu: } b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2$$

$$v = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$\text{Dosadíme: } r = \frac{av}{2b+a} = \frac{a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}{2b+a} = \frac{a\sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4}}}{2b+a} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4b+2a}.$$

Kružnice vepsaná rovnoramennému trojúhelníku se základnou a a ramenem b má poloměr $\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4b+2a}$.

Shrnutí: Hledanou plochu můžeme získat jakou součet nebo rozdíl jiných snáze určitelných ploch.